Elements d'algorithmique

Concours blanc : épreuve d'Informatique

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Le barème est donné à titre indicatif. Tous les documents sont interdits.

Exercice 1. (3 points)

```
FUNCTION g(a : real; n : integer) : real;
BEGIN
   IF (n = 0) THEN g := 1
   ELSE g := a * g(a, n - 1);
END;
```

- Quel est le résultat de l'appel $g(2,5)$?
- De manière générale, quel est le résultat de cette fonction pour un a quelconque et un n positif ?
- Que se passe-t'il si le n fourni en paramètre est négatif ?

Exercice 2. (3 points)

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On lance n fois une pièce équilibrée (c'est-à-dire donnant "pile" avec une probabilité $\frac{1}{2}$ et "face" avec une probabilité $\frac{1}{2}$), les lancers étant supposés indépendants. On note Z la variable aléatoire qui vaut 0 si l'on obtient aucun "pile" pendant ces n lancers et qui, dans le cas contraire, prend pour valeur le rang du premier "pile".

On rappelle que l'instruction `random(2)` renvoie un nombre au hasard parmi les nombres 0 et 1. Recopier et compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience décrite ci-dessus, l'entier n étant rentré au clavier par l'utilisateur (un tirage "pile" sera codé par le nombre 1 et "face" par 0).

```
PROGRAM exercice4;
VAR k, n, z, lancer : integer;
BEGIN
   randomize;
   readln(n);
   k := 0;
   z := 0;
   REPEAT
      k := k + 1;
      lancer := random(2);
      IF (lancer = 1 ) THEN ............... ;
   UNTIL (lancer = 1 OR ........... );
   writeln(z);
END.
```

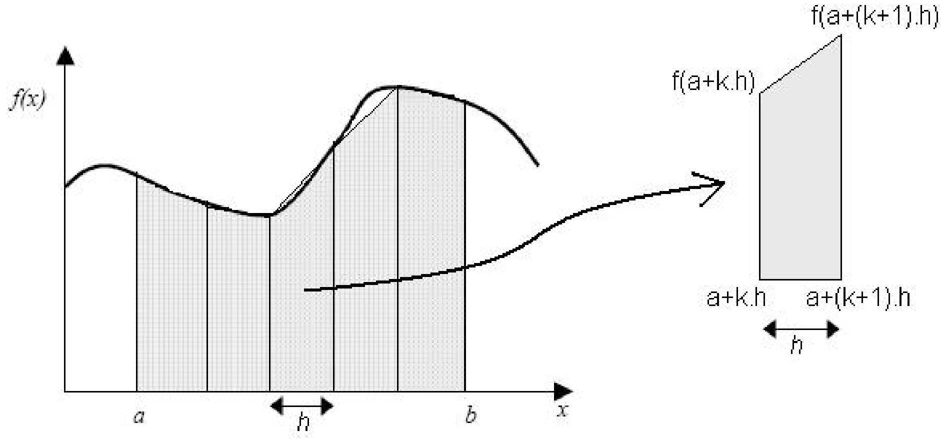
Exercice 3. (7 points)

Soit la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence suivante, valable pour tout entier $n \geq 1$: $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

- Écrire un programme permettant de calculer et d'afficher u_n lorsque l'utilisateur entre la valeur de n au clavier ;
- Écrire un second programme qui permet de déterminer et d'afficher la plus petit entier naturel n pour lequel $u_n > 100$.

Exercice 4. (7 points)

On souhaite approximer le calcul de l'intégrale d'une fonction f, continue sur un intervalle $[a, b]$, par la méthode dite "des trapèzes". Son principe est de découper l'intervalle d'intégration $[a, b]$ en n morceaux de taille $h = \frac{b-a}{n}$ et, pour chaque morceau, d'associer un trapèze (cf. figure ci-dessous). Une approximation



de l'aire comprise entre la courbe et l'axe des abcisses est la somme des aires des trapèzes (aires négatives quand les rectangles sont sous l'axe des abcisses).

En utilisant la formule permettant de calculer l'aire d'un trapèze, on obtient pour chaque intervalle $[a + k.h, a + (k + 1).h]$, où k est un entier compris entre 0 et $(n - 1)$ l'approximation suivante :

$$\int_{a+k.h}^{a+(k+1).h} f(x)\,\mathrm{d}x \simeq h.\frac{f(a+k.h)+f(a+(k+1).h)}{2}$$

En utilisant la relation de Chasles pour l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, on écrit alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{a+h} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a+h}^{a+2.h} f(x)\,\mathrm{d}x + \cdots + \int_{a+(n-1).h}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+k.h}^{a+(k+1).h} f(x)\,\mathrm{d}x$$

D'où la formule la formule d'approximation par la méthodes des trapèzes :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = h.\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(a+k.h)+f(a+(k+1).h)}{2}$$

On souhaite écrite un programme pour approximer l'intégrale $\int_0^1 (x^2 + e^x)\,\mathrm{d}x$.

- Écrire une fonction f calculant $x^2 + e^x$ pour un réel x reçu en paramètre ;
- Écrire une fonction *integrale* calculant $\int_0^1 f\,\mathrm{d}x$ en utilisant la formule d'approximation des trapèzes (on prendra $n = 50$) ;
- Écrire le programme principal lançant la simulation numérique de l'intégrale en appelant la fonction *integrale*.